§ 9. ВЫРАЖЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ЧЕРЕЗ ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Определим компоненты тензора инерции в точке O относительно осей координат $Oxyz$, если в этой точке известны главные моменты инерции относительно главных осей инерции $Ox'y'z'$, т. е. $J_1=J_{x'}$, $J_2=J_{y'}$, $J_3=J_{z'}$. Предположим, что ориентация осей координат $Oxyz$ относительно главных осей инерции $Ox'y'z'$ задана таблицей углов:

	$Ox';\ \bar{i}'$	$Oy';\ \bar{j}'$	$Oz';\ \bar{k}'$
$Ox;\ \bar{i}$	α_1	β_1	γ_1
$Oy;\ \bar{j}$	α_2	β_2	γ_2
$Oz;\ \bar{k}$	α_3	β_3	γ_3

Осевые моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz через главные моменты инерции определяются по формуле (24'). Принимая последовательно за ось Ol оси координат Ox, Oy, Oz, получим

$$\left.\begin{aligned} J_x&=J_{x'}\cos^2\alpha_1+J_{y'}\cos^2\beta_1+J_{z'}\cos^2\gamma_1;\\ J_y&=J_{x'}\cos^2\alpha_2+J_{y'}\cos^2\beta_2+J_{z'}\cos^2\gamma_2;\\ J_z&=J_{x'}\cos^2\alpha_3+J_{y'}\cos^2\beta_3+J_{z'}\cos^2\gamma_3.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Для выражения центробежных моментов инерции через главные моменты инерции используем формулы преобразования координат точек тела при повороте осей координат вокруг точки O (рис. 35). Эти формулы получим проецированием на оси $Oxyz$ радиуса-вектора $\bar{r}_k$ точки M_k, разложенного предварительно на составляющие, параллельные осям двух систем осей координат в точке O. Имеем

$$\bar{r}_k=x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k}=x'_k\bar{i}'+y'_k\bar{j}'+z'_k\bar{k}', \tag{32}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k относительно системы осей координат $Oxyz$, а x'_k, y'_k, z'_k — относительно $Ox'y'z'$. Проецирование вектора на какую-либо ось прямоугольной системы координат эквивалентно скалярному умножению этого вектора на единичный вектор оси. Умножая обе части (32) последовательно на единичные векторы осей координат $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и учитывая таблицу углов для осей, получим

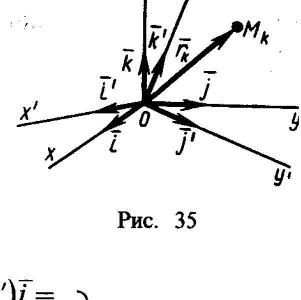

Рис. 35

$$\left.\begin{aligned} x_k&=\bar{r}_k\cdot\bar{i}=(x'_k\bar{i}'+y'_k\bar{j}'+z'_k\bar{k}')\bar{i}=\\ &=x'_k\cos\alpha_1+y'_k\cos\beta_1+z'_k\cos\gamma_1;\\ y_k&=\bar{r}_k\cdot\bar{j}=(x'_k\bar{i}'+y'_k\bar{j}'+z'_k\bar{k}')\bar{j}=\\ &=x'_k\cos\alpha_2+y'_k\cos\beta_2+z'_k\cos\gamma_2;\\ z_k&=\bar{r}_k\cdot\bar{k}=(x'_k\bar{i}'+y'_k\bar{j}'+z'_k\bar{k}')\bar{k}=\\ &=x'_k\cos\alpha_3+y'_k\cos\beta_3+z'_k\cos\gamma_3;\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Используя (33) для центробежного момента инерции J_{xy}, имеем

$$J_{xy}=\sum_{k=1}^{N}m_kx_ky_k=\left(\sum_{k=1}^{N}m_kx'^2_k\right)\cos\alpha_1\cos\alpha_2+$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{N}m_ky'^2_k\right)\cos\beta_1\cos\beta_2+\left(\sum_{k=1}^{N}m_kz'^2_k\right)\cos\gamma_1\cos\gamma_2, \tag{34}$$

так как центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю, т. е.

$$J_{x'y'}=\sum_{k=1}^{N}m_kx'_ky'_k=0;\quad J_{y'z'}=\sum_{k=1}^{N}m_ky'_kz'_k=0;\quad J_{z'x'}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}m_kz'_kx'_k=0.$$

Оси координат Ox и Oy взаимно перпендикулярны, поэтому косинусы их углов удовлетворяют условию

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$

или

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2=-(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2).$$

Используя это соотношение для исключения величины $\cos\gamma_1\cos\gamma_2$ и добавляя в первом слагаемом (34) под знаком суммы $(y'^2_k-y'^2_k)=0$, а во втором $(x'^2_k-x'^2_k)=0$, после объединения слагаемых с одинаковыми произведениями косинусов получим

$$J_{xy}=\left[\sum_{k=1}^{N}m_k(x'^2_k+y'^2_k)-\sum_{k=1}^{N}m_k(y'^2_k+z'^2_k)\right]\cos\alpha_1\cos\alpha_2+$$
$$+\left[\sum_{k=1}^{N}m_k(x'^2_k+y'^2_k)-\sum_{k=1}^{N}m_k(x'^2_k+z'^2_k)\right]\cos\beta_1\cos\beta_2=$$
$$=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_1\cos\beta_2,$$

где $\sum_{k=1}^{N}m_k(x'^2_k+y'^2_k)=J_{z'}$; $\sum_{k=1}^{N}m_k(y'^2_k+z'^2_k)=J_{x'}$; $\sum_{k=1}^{N}m_k(z'^2_k+x'^2_k)=J_{y'}$

— главные моменты инерции. Аналогично получаются выражения для J_{yz} и J_{zx}. Итак имеем

$$\left.\begin{aligned} J_{xy}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_1\cos\beta_2;\\ J_{yz}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_2\cos\alpha_3+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_2\cos\beta_3;\\ J_{zx}&=(J_{z'}-J_{x'})\cos\alpha_3\cos\alpha_1+(J_{z'}-J_{y'})\cos\beta_3\cos\beta_1.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Формулы (31) и (35) дают выражения всех компонентов тензора инерции для осей координат $Oxyz$ через главные моменты инерции, если известны углы этих осей с главными осями инерции. В приложениях встречаются частные случаи, когда одна из осей координат $Oxyz$ совпадает с главной осью инерции.

Если ось Ox сопадает с главной осью инерции Ox' (рис. 36), то $J_{xy}=J_{x'y'}=0$; $J_{zx}=J_{zx'}=0$. Это же можно получить из (35). Необходимые для вычисления углы соответственно равны:

$$\alpha_2=90°,\ \ \alpha_3=90°,\ \ \beta_2=\alpha,\ \ \beta_3=90°-\alpha.$$

Из (35) имеем

$$J_{yz}=(J_{z'}-J_{y'})\cos\alpha\sin\alpha=\frac{J_{z'}-J_{y'}}{2}\sin 2\alpha. \tag{35'}$$

В формуле (35') с полюсом следует брать главный момент инерции с индексом той оси, на положительное направление которой указывает дуговая стрелка поворота осей Oyz на угол $\alpha<90°$ до совпадения с осями $Oy'z'$. В рассматриваемом случае поворот осей Oyz вокруг Ox до совпадения с главными осями производится от оси Oy к оси Oz; следовательно, с плюсом следует взять главный момент инерции J'_z и с минусом — J_y.

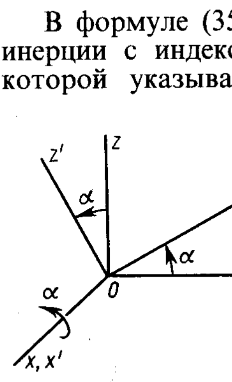

Рис. 36

Если оси расположены, как показано на рис. 37, то дуговая стрелка поворота осей Oyz до совпадения с

главными осями инерции $Oy'z'$ на угол $\alpha<90°$ направлена к отрицательному направлению оси Oz. Поэтому в (35') $J_{z'}$ следует взять со знаком минус, а $J_{y'}$ — со знаком плюс, в чем нетрудно убедиться, используя (35) и таблицу углов. Имеем:

$$\alpha_2=90°;\ \ \alpha_3=90°;\ \ \beta_2=\alpha;\ \ \beta_3=90°+\alpha;$$
$$J_{yz}=(J_{z'}-J_{y'})\cos\alpha\cos(-\sin\alpha)=$$
$$=(J_{y'}-J_{z'})\cos\alpha\sin\alpha=\frac{J_{y'}-J_{z'}}{2}\sin 2\alpha.$$

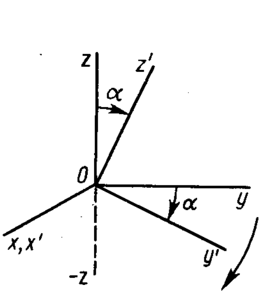

Рис. 37

Аналогично при совпадении осей Oy с Oy' и повороте осей Oxz вокруг Oy до совпадения с осями $Ox'z'$ на угол $\beta<90°$ от Oz к Ox в направлении против часовой стрелки имеем:

$$J_{xy}=J_{xy'}=0;\ \ J_{yz}=J_{y'z}=0;\ \ J_{zx}=\frac{J_{x'}-J_{z'}}{2}\sin 2\beta.$$

При совпадении осей Oz и Oz' и повороте осей вокруг Oz на угол $\gamma<90°$ от Ox к Oy против часовой стрелки получим:

$$J_{xz}=J_{xz'}=0;\ \ J_{yz}=J_{yz'}=0;\ \ J_{xy}=\frac{J_{y'}-J_{x'}}{2}\sin 2\gamma.$$